I - Questions ouvertes d'électrocinétique

I.1 - Résistance équivalente (circuit n°1)

1) La résistance équivalente vaut :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + xR + R} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{1}{2+x}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{3+x}{2+x}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{eq} = R \times \frac{2+x}{3+x}}$$

2) On veut :

$$R_{eq} = xR = R \times \frac{2+x}{3+x} \quad \Rightarrow \quad x(3+x) = 2+x \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

Les solutions sont : $x_\pm = \frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{12}\right) = \pm\sqrt{3} - 1$

On garde la solution positive : $\boxed{x = \sqrt{3} - 1}$

I.2 - Détermination d'une intensité (circuit n°2)

3) La résistance équivalente vaut :

$$\boxed{R_{eq} = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = r + \frac{rR}{R+r}}$$

4) Une loi des mailles donne immédiatement :

$$E = i_0\, R_{eq} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_0 = \frac{E}{R_{eq}}}$$

5) Avec un pont diviseur d'intensité :

$$\boxed{i = \frac{r}{r+R}\, i_0}$$

I.3 - Mesure d'une force électromotrice (circuit n°3)

6) Lois dans les deux petites mailles + loi des nœuds :

$$\boxed{E_1 = R_1(1-x)i_1 + xR_1 i \qquad E_2 = i_2 R_2 + xR_1 i \qquad i = i_1 + i_2}$$

7) Dans le cas où $i_2 = 0$, les équations précédentes deviennent :

$$E_1 = R_1(1-x)i_1 + xR_1 i \qquad E_2 = xR_1 i \qquad i = i_1$$

On combine ces équations pour obtenir :

$$E_1 = [R_1(1-x) + xR_1]i = [R_1(1-x) + xR_1] \times \frac{E_2}{xR_1} = \frac{E_2}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{E_2}{E_1} > 0}$$

On peut annuler i_2 tant que $E_2 < E_1$.

--- Fin de la partie I ---

II - Stratégies de charge d'un condensateur

8) On cherche le rendement sous la forme : $\eta \propto R^\alpha C^\beta E^\gamma$, avec α, β et γ des coefficients à déterminer. On sait de plus que (on rappelle que I est l'abréviation de « intensité ») :

$$[E] = \text{Tension} \qquad [R] = \frac{\text{Tension}}{I} \qquad [C] = \frac{I \cdot T}{\text{Tension}} \qquad [\eta] = 1$$

Ainsi, il faut satisfaire l'équation aux dimensions :

$$1 = \left(\frac{\text{Tension}}{I}\right)^{\alpha} \left(\frac{I \cdot T}{\text{Tension}}\right)^{\beta} (\text{Tension})^{\gamma} = (\text{Tension})^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot I^{\beta-\alpha} \cdot T^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équation implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On en déduit que η est proportionnel à une constante adimensionnée.

II.1 - Premier procédé de charge

9) La loi des mailles donne :

$$E = Ri + u_c = RC\frac{du_c}{dt} + u_c$$

Sous forme canonique :

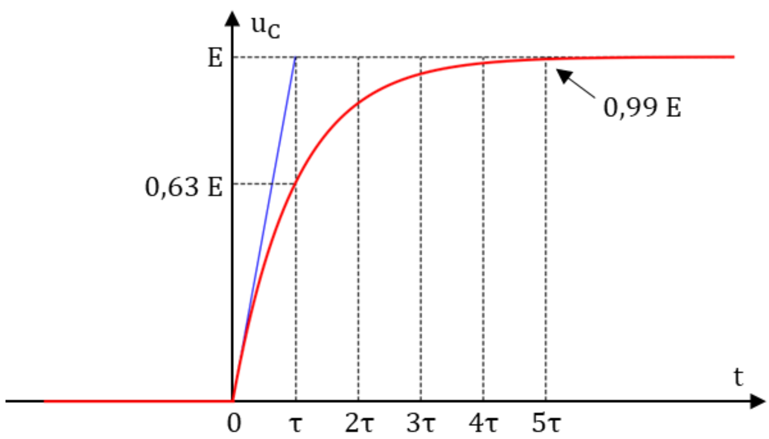
$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = RC}$$

10) Le condensateur étant déchargé, on a $u_c(0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $\boxed{u_c(0^+) = 0}$.

11) Solution de l'ED : $u_c(t) = A\, e^{-t/\tau} + E$

Avec les CI, on trouve : $\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

12) Graphe :



13) Énergie stockée par le condensateur en fin de charge ($u_c(+\infty) = E$) :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}CE^2}$$

14) On a :

$$\boxed{i = C\frac{du_c}{dt} = \frac{CE}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$

15) Énergie fournie par le générateur :

$$\boxed{\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_d\, dt = \int_0^{+\infty} Ei(t)\, dt = \int_0^{+\infty} EC\frac{du_c}{dt}\, dt = EC\,[u_c]_0^{+\infty} = CE^2}$$

16) Le rendement vaut :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}_g} = \frac{1}{2}}$$

Il ne dépend pas de R.

II.2 - Second procédé de charge

17) Le problème est similaire en remplaçant $E \to E/2$. Ainsi :

$$\boxed{u_c(t) = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

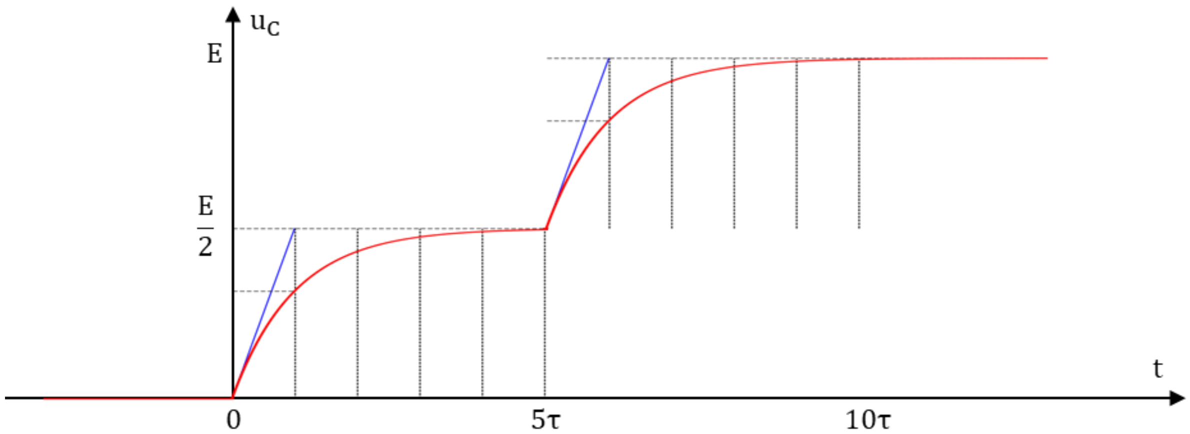
18) On a :

$$0{,}99 = 1 - e^{-t_1/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \tau \ln(100)}$$

19) Il s'agit de la même ED que dans la partie 1, seule la condition initiale change.

$$u_c(t) = A\, e^{-t/\tau} + E \quad \text{et} \quad u_c(t_1) = \frac{\mathrm{E}}{2} = A\, e^{-t_1/\tau} + E \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c(t) = -\frac{E}{2}\, e^{-(t-t_1)/\tau} + E}$$

20)



21) On a :

$$\boxed{i_c(t) = \begin{cases} \dfrac{E}{2R} e^{-t/\tau} & \text{si } t < t_1 \\ \dfrac{E}{2R}\, e^{-(t-t_1)/\tau} & \text{si } t > t_1 \end{cases}}$$

22) Énergie fournie par les générateurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g &= \int_0^{t_1} \mathcal{P}_d\, dt + \int_{t_1}^{+\infty} \mathcal{P}_d\, dt = \int_0^{t_1} \frac{E}{2} C \frac{du_c}{dt}\, dt + \int_{t_1}^{+\infty} EC \frac{du_c}{dt}\, dt \\ &= \frac{E}{2} C\, [u_c]_0^{t_1} + EC\, [u_c]_{t_1}^{+\infty} = \frac{E}{2} C \left(\frac{E}{2} - 0\right) + EC \left(E - \frac{E}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{3}{4} E^2 C} \end{aligned}$$

23) On en déduit :

$$\boxed{\eta = \frac{\frac{1}{2} C E^2}{\frac{3}{4} E^2 C} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}}$$

Le rendement est plus important qu'avec une charge directe, mais il faut déclencher l'interrupteur et disposer de deux générateurs.

II.3 - Généralisation à une charge en N étapes

24) L'équation différentielle est :

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{kE}{N\tau}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau = RC}$$

Sa solution :

$$u_c(t) = A\, e^{-t/\tau} + \frac{kE}{N} \quad \text{et} \quad u_c(t_{k-1}) = (k-1)\frac{E}{N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c(t) = \frac{E}{N}\left(k - e^{-(t-t_{k-1})/\tau}\right)}$$

L'intensité :

$$\boxed{i = C\frac{du_c}{dt} = \frac{E}{RN} e^{-(t-t_{k-1})/\tau}}$$

L'énergie fournie :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{g}} = \frac{kE}{N} C\, [u_c]_{\mathrm{t_{k-1}}}^{t_k} = \frac{kE^2}{N^2} C}$$

25) On en déduit l'énergie fournie par l'ensemble des générateurs :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{tot}} = \sum_{k=1}^{k=N} \mathcal{E}_{\mathrm{g}}(k) = \frac{CE^2}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{CE^2}{N^2}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{CE^2(N+1)}{2N}}$$

26) On en déduit :

$$\boxed{\eta = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\mathcal{E}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{tot}}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1}$$

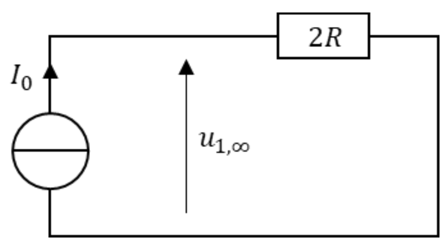
Le rendement vaut 99 % lorsque :

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1} = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 99}$$

-- Fin de la partie II --

III - Circuite à deux condensateurs

27) Les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. On peut également combiner les deux résistances.



Une loi des mailles donne : $\boxed{u_{1,\infty} = 2RI_0}$

28) Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $\boxed{u_1(t=0^+) = u_1(t=0^-) = 0}$.

Tant que K_2 est fermé, on a : $i_{R_1} = i_{R_2} = i_R$. Une loi des mailles donne :

$$u_1 = u_{R_1} + u_{R_2} = 2R\, i_{\mathrm{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{\mathrm{R}}(t=0^+) = 0}$$

Une loi des nœuds donne :

$$I_0 = i_1 + i_{\mathrm{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(t=0^+) = I_0}$$

29) On rappelle la relation :

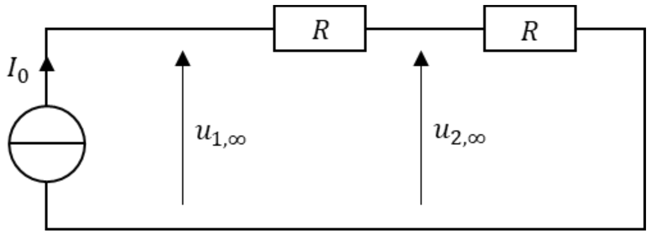
$$i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt}$$

Ainsi, la loi des mailles, avec la loi des nœuds et la relation ci-dessus, donnent :

$$u_1 = 2R\, i_R = 2R(I_0 - i_1) = 2R\left(I_0 - C_1 \frac{du_1}{dt}\right) = \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{2RC_1} = \frac{I_0}{C_1}}$$

On pose donc : $\boxed{\tau = 2RC_1}$.

30) Il s'agit du même circuit que précédemment. On ne combine plus les deux résistances pour faire apparaitre $u_{2,\infty}$.



$u_{2,\infty}$ est la tension aux bornes de la résistance R et $u_{1,\infty}$ celle aux bornes de la résistance $2R$. Donc :

$$\boxed{u_{1,\infty} = 2RI_0 \qquad u_{2,\infty} = RI_0}$$

L'énergie totale stockée vaut donc :

$$\boxed{\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2} C_1 u_{1,\infty}^2 + \frac{1}{2} C_2 u_{2,\infty}^2 = R^2 I_0^2 \left(2C_1 + \frac{C_2}{2}\right)}$$

31) Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$u_1(t = 0^+) = u_2(t = 0^+) = 0$$

Or, u_2 est la tension aux bornes de la résistance R. Donc :

$$\boxed{i_{R_2}(t = 0^+) = \frac{u_2(t = 0^+)}{R} = 0}$$

De plus, une loi des mailles donne :

$$u_1 = u_{R_1} + u_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{R_1}(t = 0^+) = \frac{u_{R_1}(t = 0^+)}{R} = 0}$$

Des lois des nœuds donne donc :

$$\boxed{i_1(t = 0^+) = I_0 \quad \text{et} \quad i_2(t = 0^+) = 0}$$

Puisque $i = C\frac{du}{dt}$, on en déduit que :

$$\boxed{\dot{u}_1(t = 0^+) = \frac{I_0}{C_1} > 0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_2(t = 0^+) = 0}$$

En regardant les courbe, on a bien la courbe (1) qui présente en 0^+ une dérivée positive et la courbe (2) qui présente en $t = 0^+$ une dérivée nulle.

--- Fin de la partie III ---